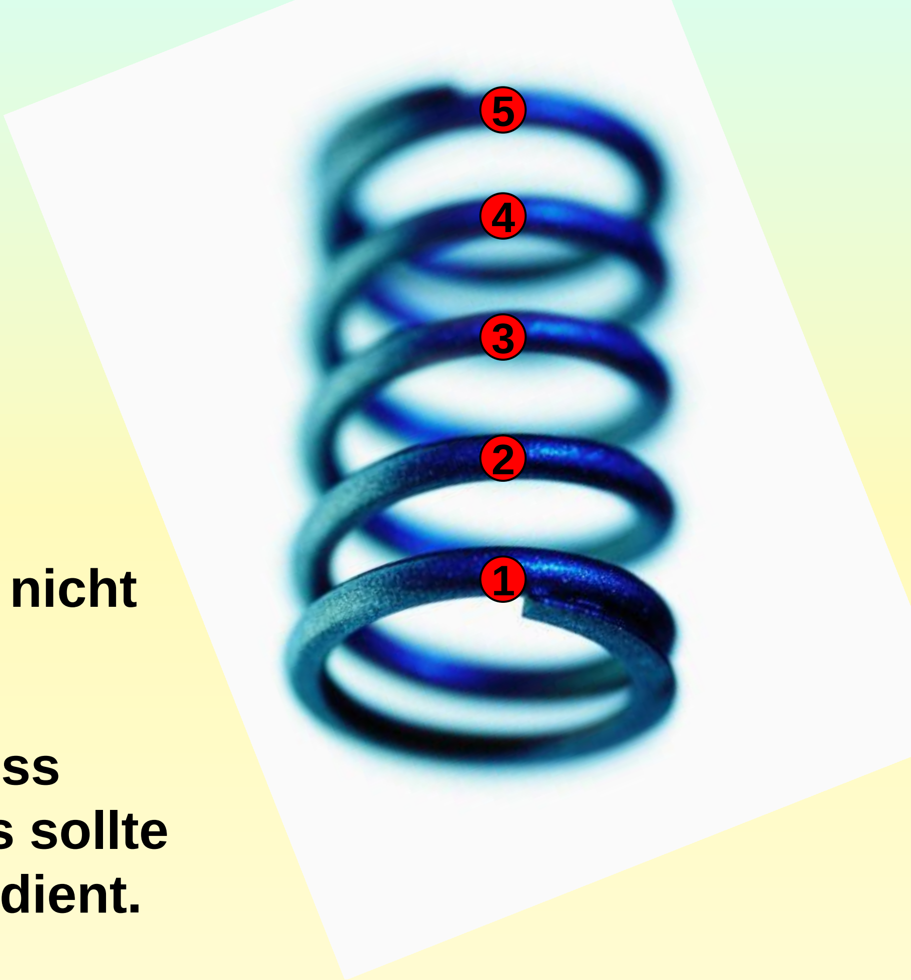
Lernlinie:
Vom Flächeninhalt des Rechtecks zum Integral

Das Spiralprinzip
[Bruner,J.S.,1967]

Dasselbe Thema wird zu verschiedene Zeitpunkten (z. T. Schulstufen) auf verschiedenen Niveaus behandelt

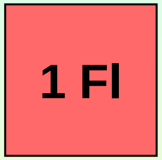


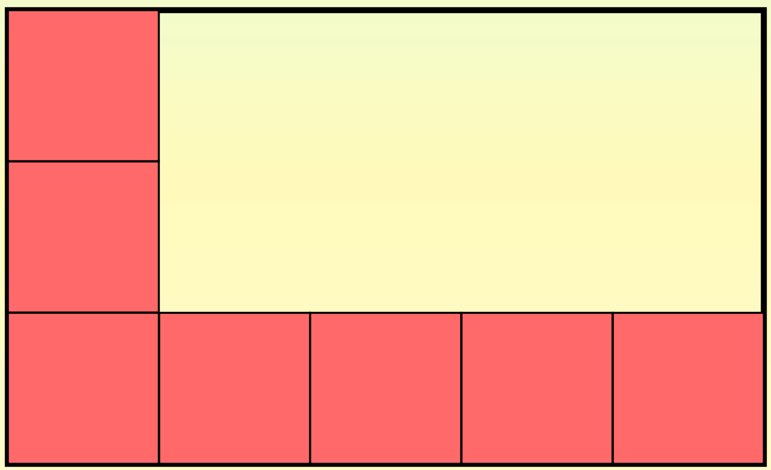
Zu beachten:

- Die einzelnen Durchläufe dürfen nicht isoliert voneinander bleiben
- Die Standpunktsverlagerung muss bewusst gemacht werden und es sollte auch transparent sein, wozu sie dient.
- Frühere Durchläufe dürfen spätere Erweiterungen nicht behindern.

Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe I

Schritt 1: Flächeninhalt ⇔ Fliesen zählen

Maßeinheit: 



A = 5 Fl x 3 = 15 Fl

↓

A = 5 x 3 Fl = 15 Fl

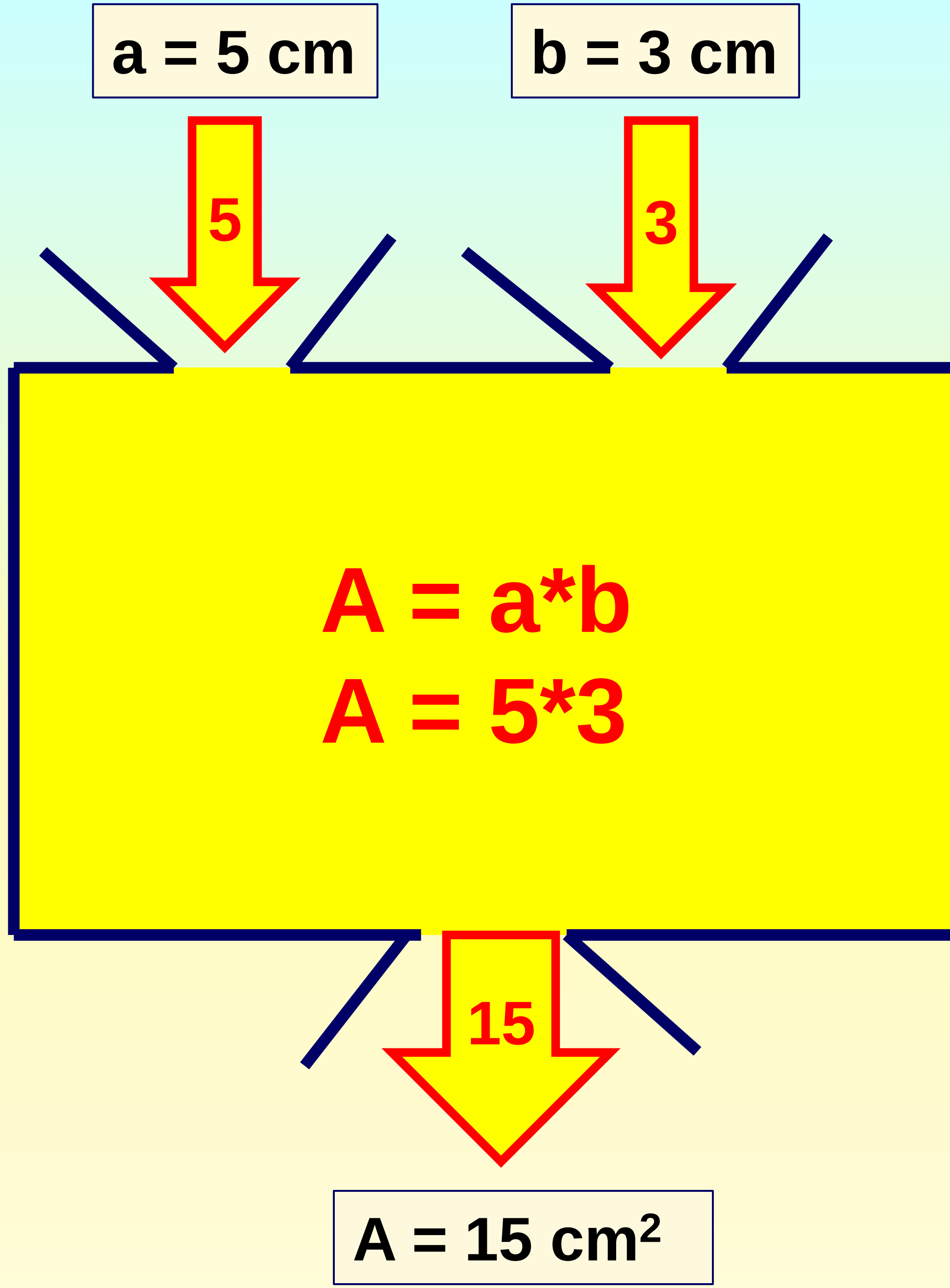
↓

A = a.b

1. Klasse

Abstraktionsschritt 1 :

Die Formel als „Maßzahlmaschine“



Darf man das? $A = 5m \,.\, 3m = 15\ m^2$

Abstraktionsschritt 2: Der Flächeninhalt als Produkt einer Maßzahl und einer Maßeinheit

Das Ergebnis der Messung einer Größe G ist eine Maßzahl G_Z, die angibt, wie oft die Maßeinheit G_E in der gemessenen Größe enthalten ist.

„Enthalten sein“ ⇔ Division: $G_Z = \frac{G}{G_E} \Leftrightarrow G = G_Z \bullet G_E$

Einsetzen der Messwerte $A = a \,.\, b = 5m \,.\, 3m$

Aufspalten in Maßzahl und Maßeinheit

$A = (5.1m) \,.\, (3.1m)$

$A = (5.3) \,.\, (1m.1m)$

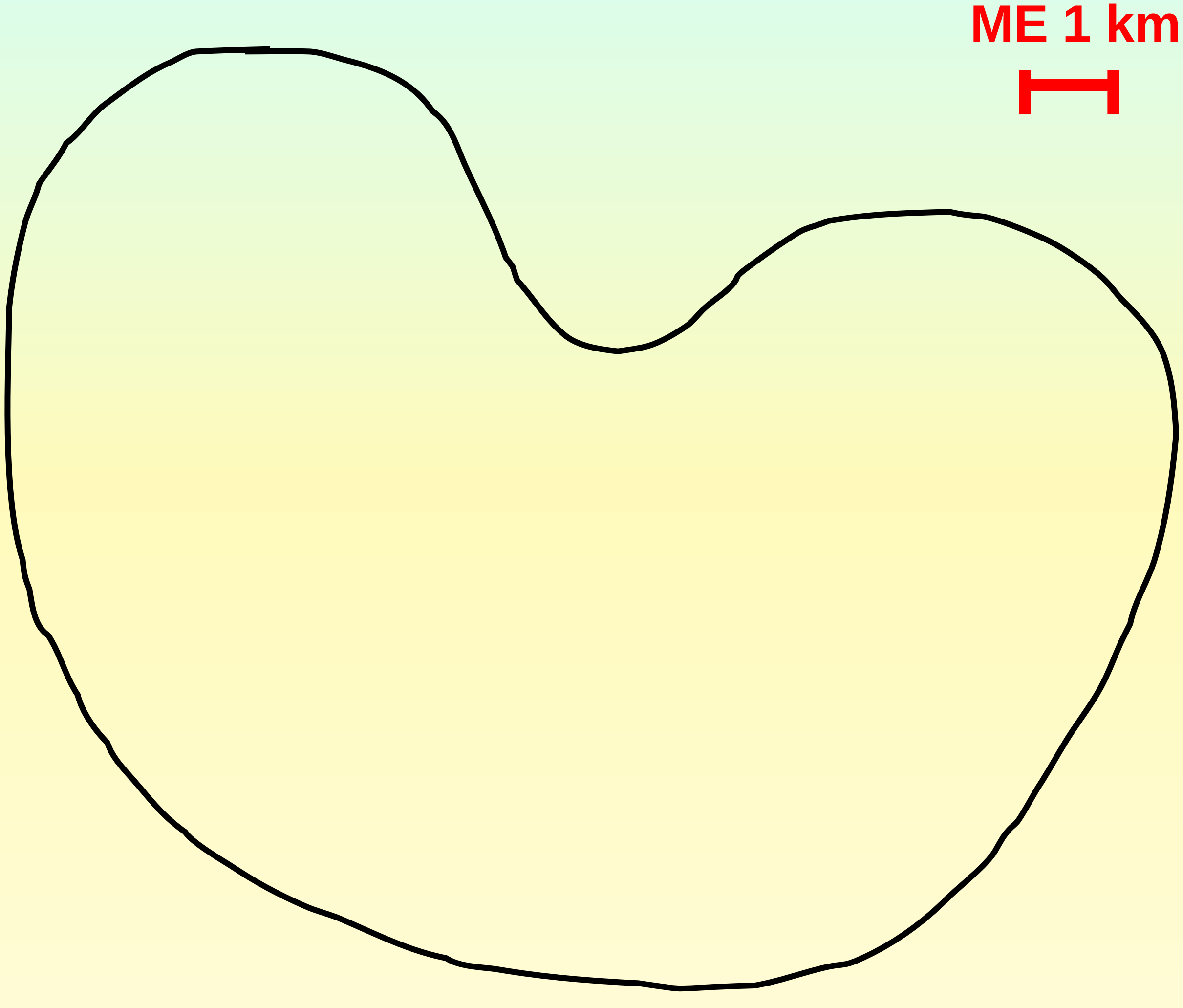
Flächeninhalt als Produkt aus Maßzahl und Maßeinheit $A = 15 \,.\, 1m^2 = 15\ m^2$

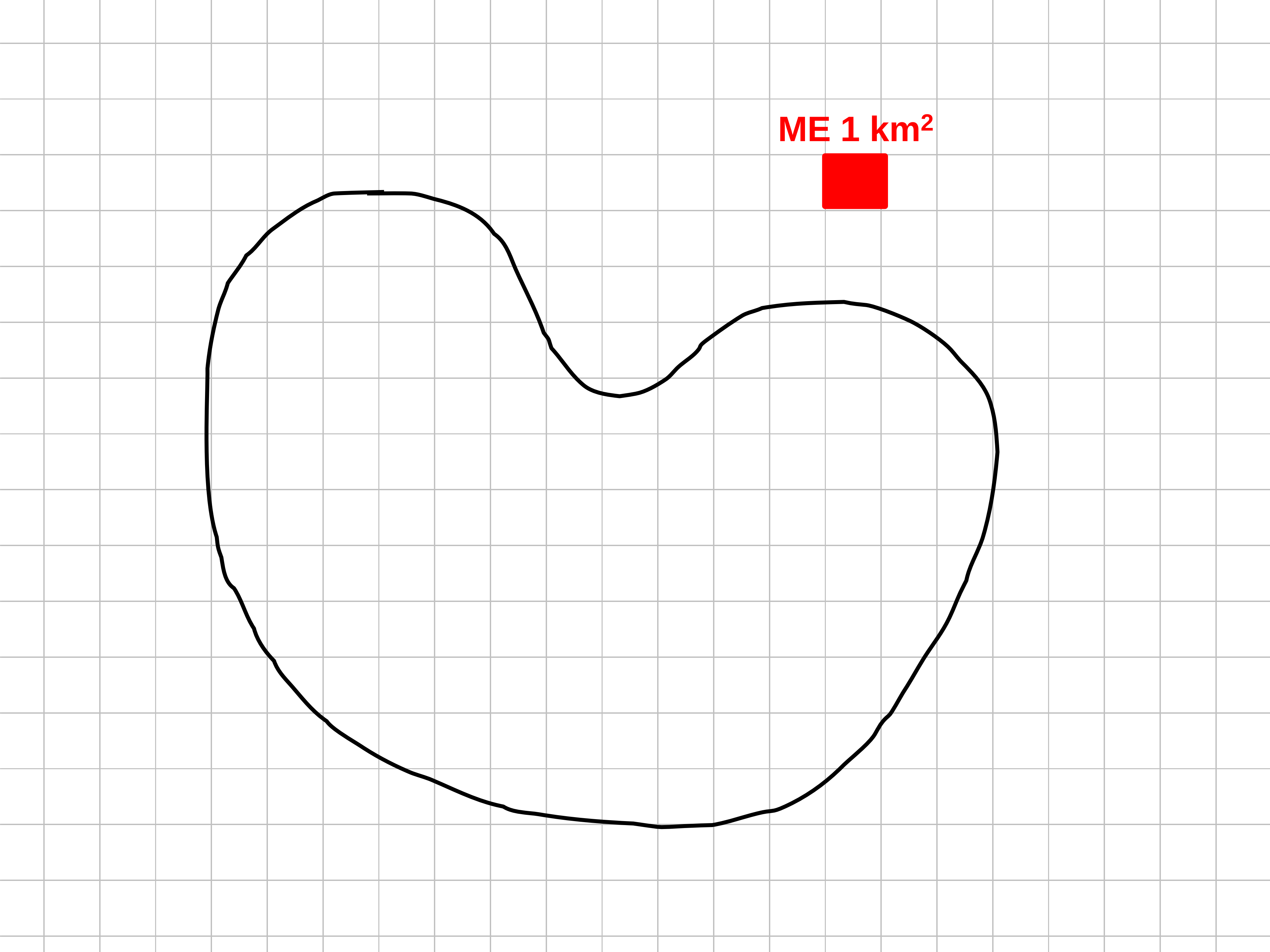
Wichtige Bedeutung dieses Abstraktionsschrittes:

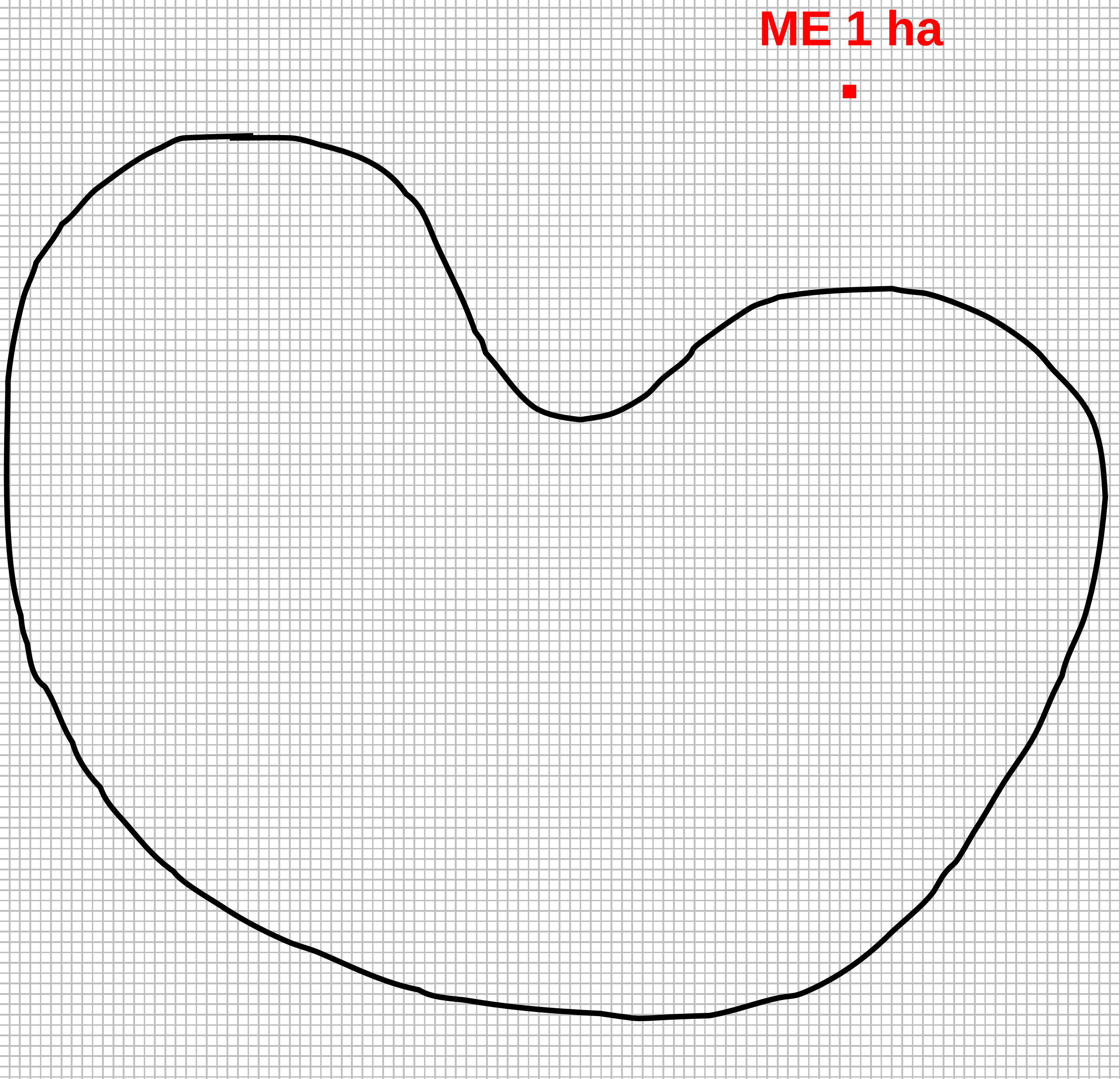
Herleitung von Einheiten abgeleiteter Größen

Formel		Einheit
Geschwindigkeit ist Weg pro Zeiteinheit	$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$	$1v_E = \frac{1m}{1s} = 1\frac{m}{s}$
Beschleunigung ist Geschwindigkeitsänderung pro Zeiteinheit	$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$	$1a_E = \frac{1\frac{m}{s}}{1s} = 1\frac{m}{s^2}$
Kraft ist Masse mal Beschleunigung	$F = m.a$	$1F_E = 1kg.1\frac{m}{s^2} = 1\frac{kg.m}{s^2} = 1N$

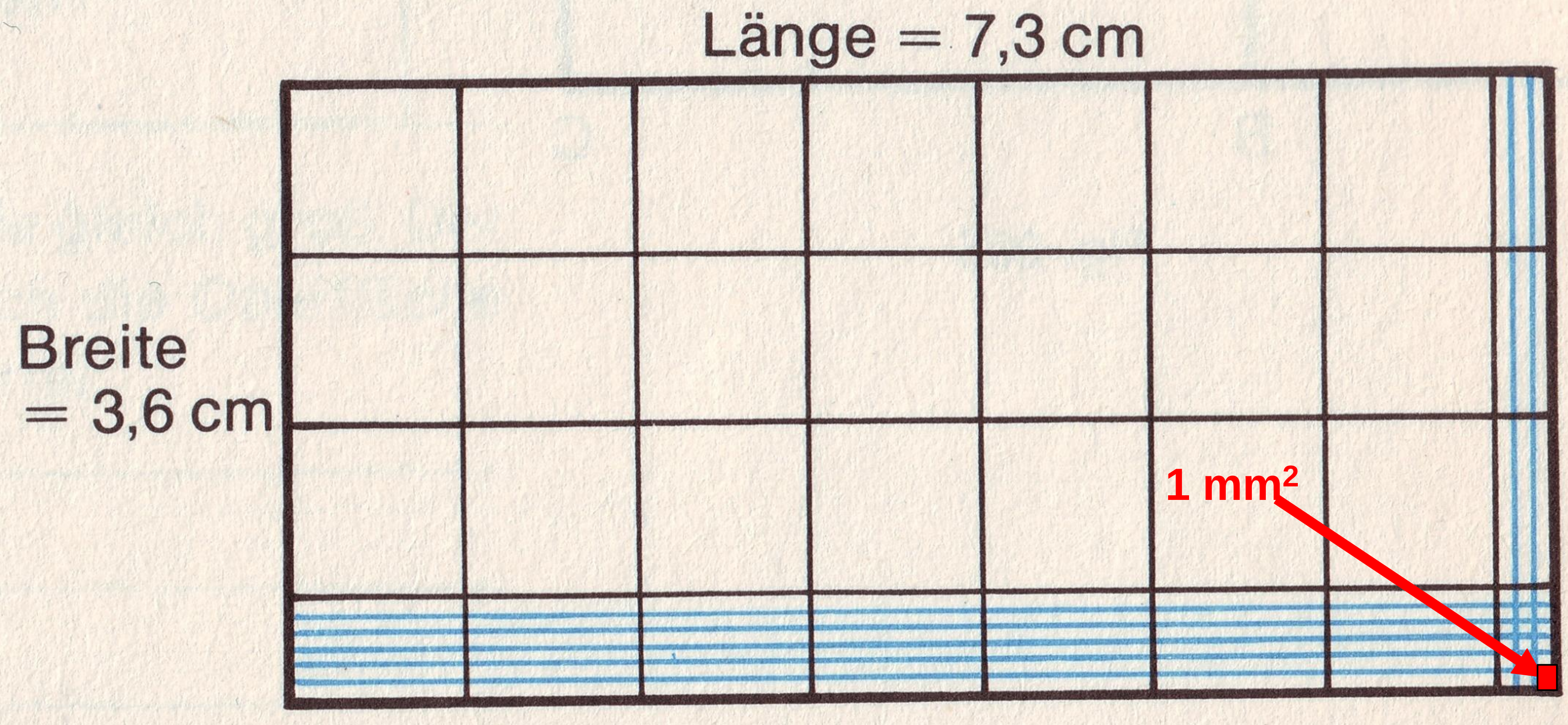
Schritt 3: Ermittlung von Inhalten unregelmäßiger Flächen



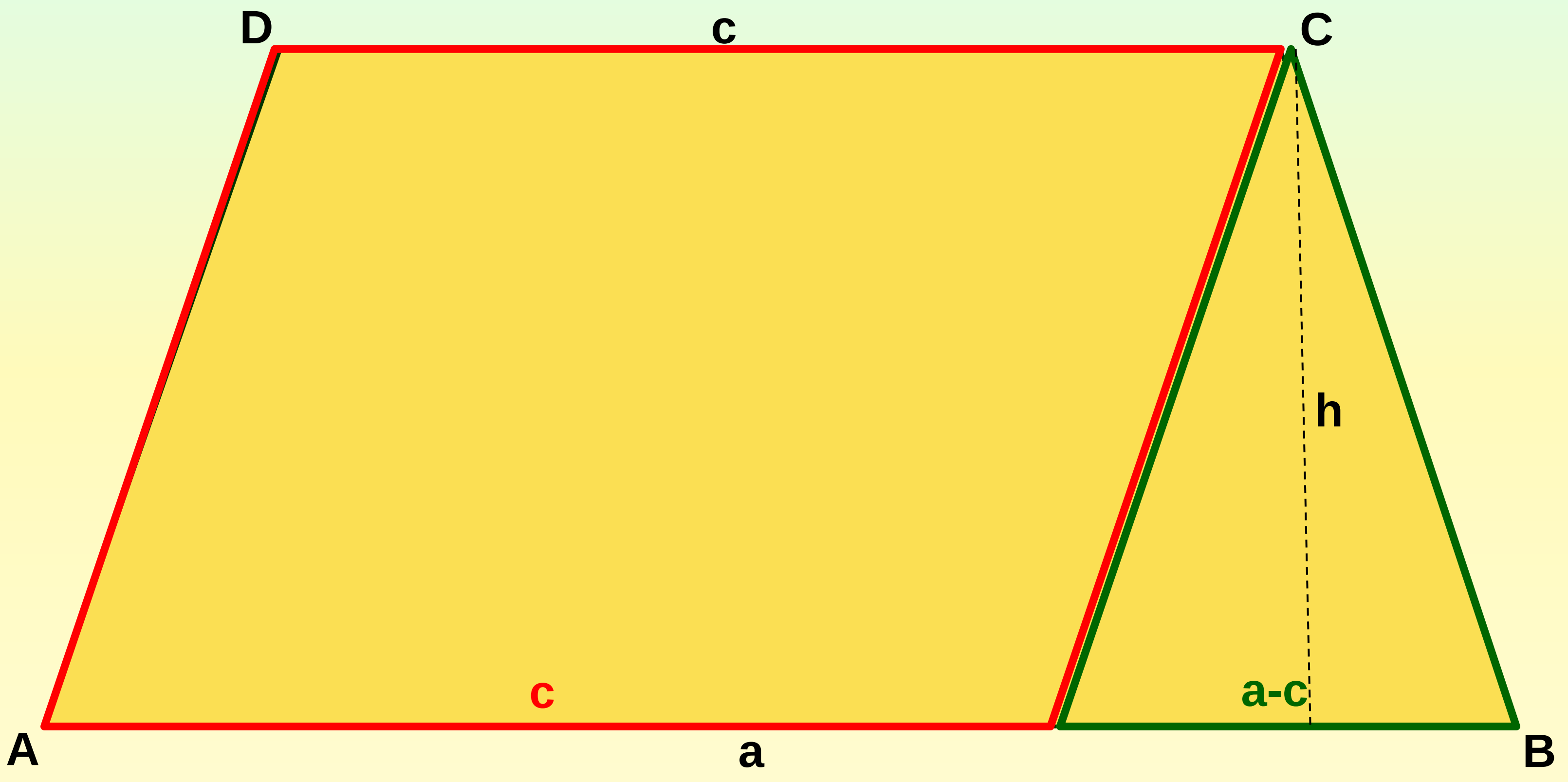

ME 1 km²


ME 1 ha

Schritt 4: Loslösen von der Ursprünglichen Idee des Einheitenzählens



Schritt 5: Herleitung von Flächeninhaltsformeln



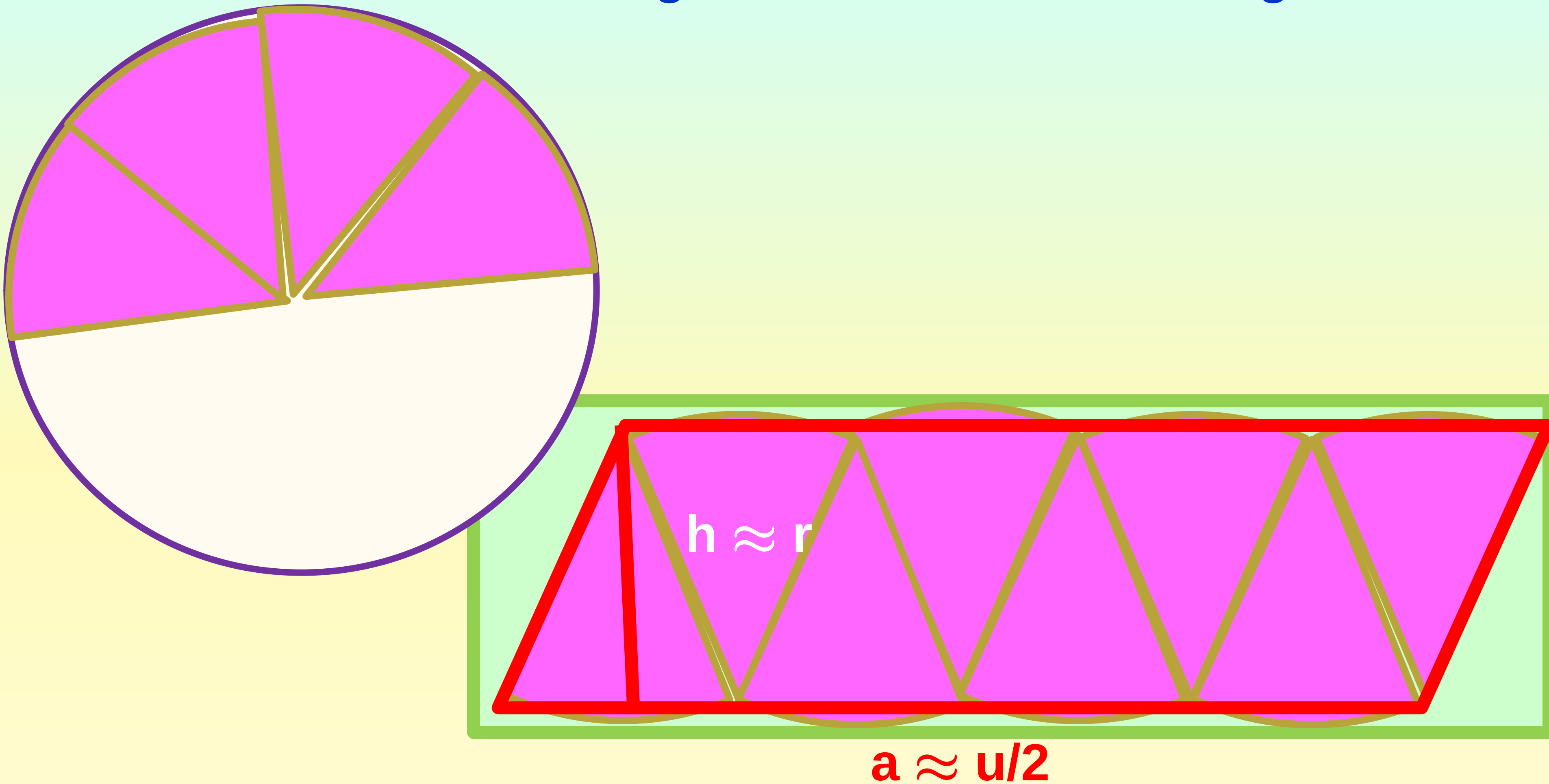
3. Klasse

4. **Klasse Mathematik:**

- **Flächeninhalt eines Rechtecks mit $l = \pi$ und $b = \sqrt{2}$**
- **Flächeninhalt eines Kreises**
- **Näherungsweises Ermitteln von Flächeninhalten**

Vermuten einer Flächenformel durch Verpacken einer Torte

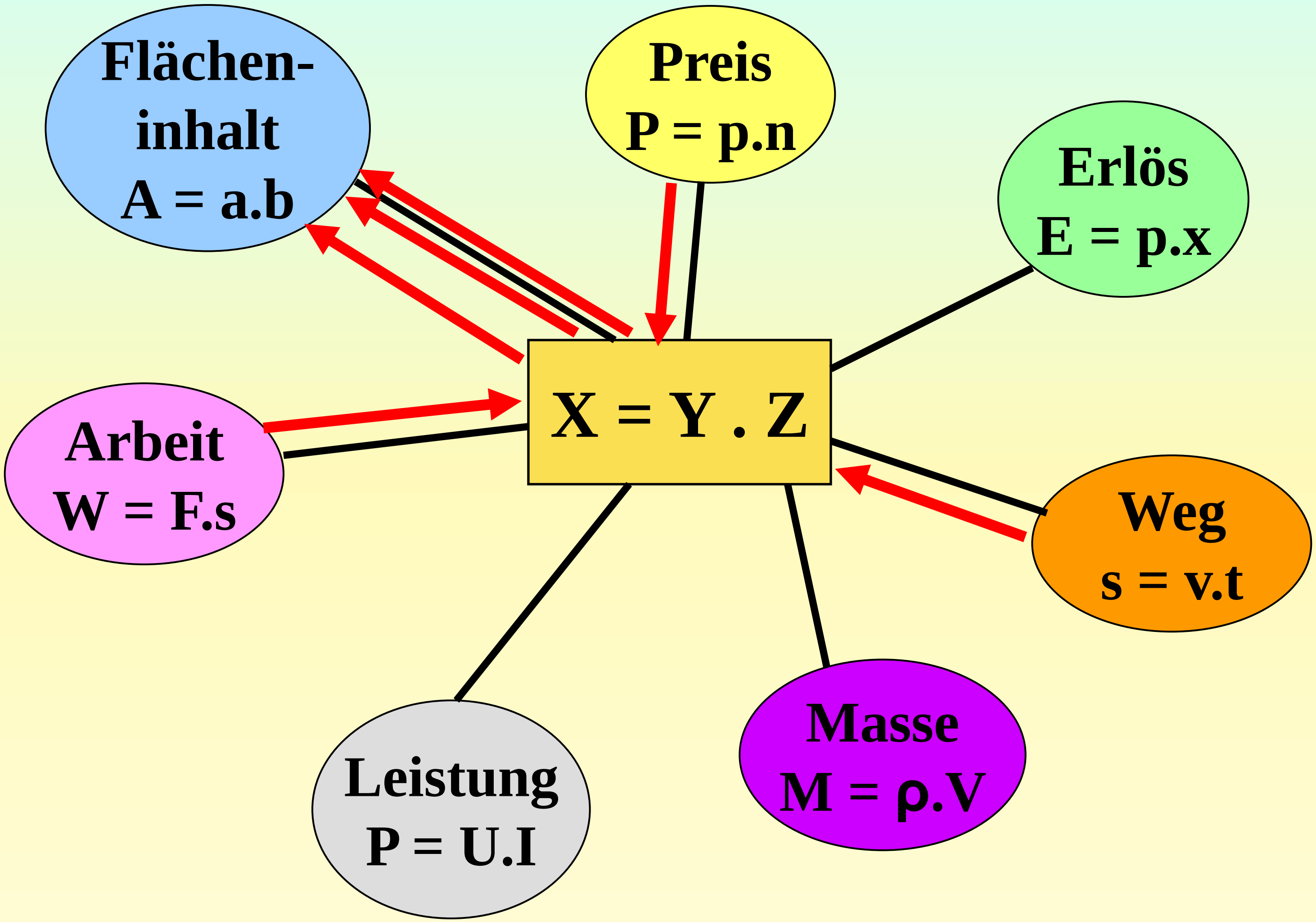
Voraussetzung: Formel für den Umfang ist bekannt



$$A = \frac{u}{2} \cdot r = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{2} \cdot r = r^2 \cdot \pi$$


Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe II
Mount Matura
Notwendige Voraussetzung
Kompetenzentwicklung in der Sek I

Schritt 1: „Verwandte“ des Flächeninhalts ⇔ Modellcharakter von Formeln

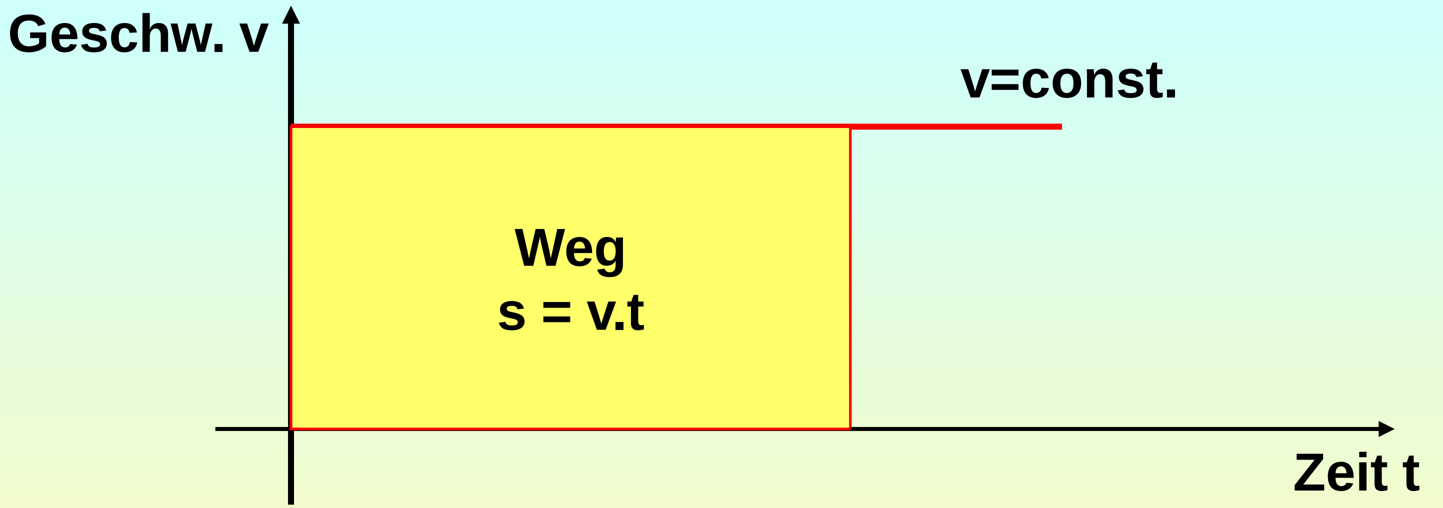


Helmut Heugl

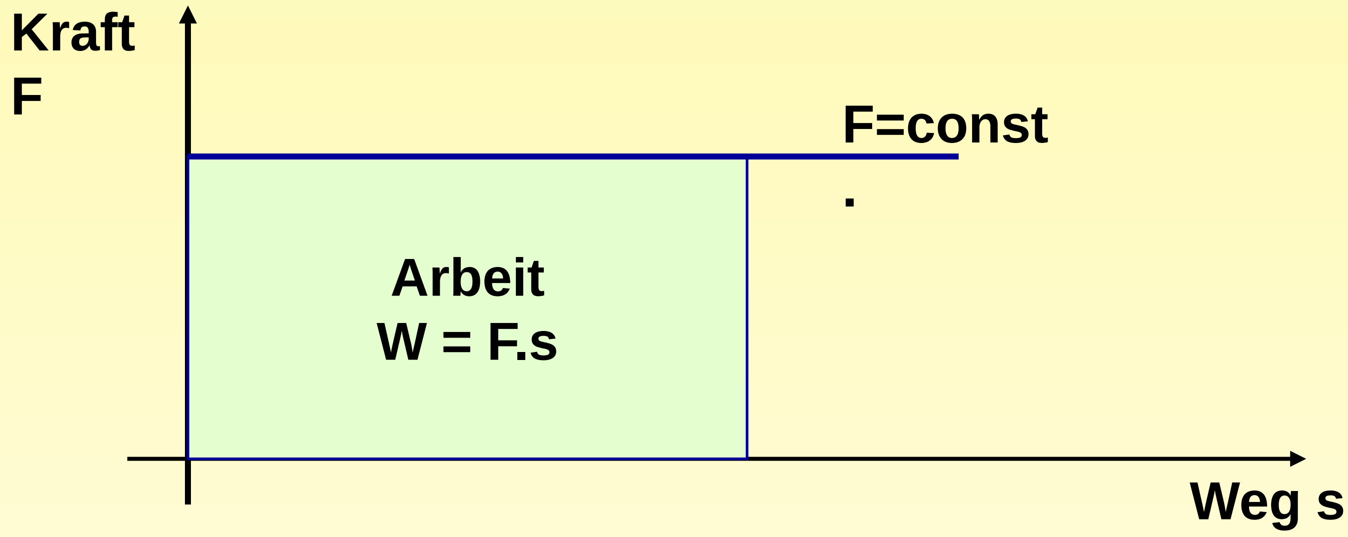
Schritt 2: Verwandte physikalische Formeln

- **Arbeit ist Kraft mal Weg ⬄ W = F.s**
- **Weg ist Geschwindigkeit mal Zeit ⬄ s = v.t**

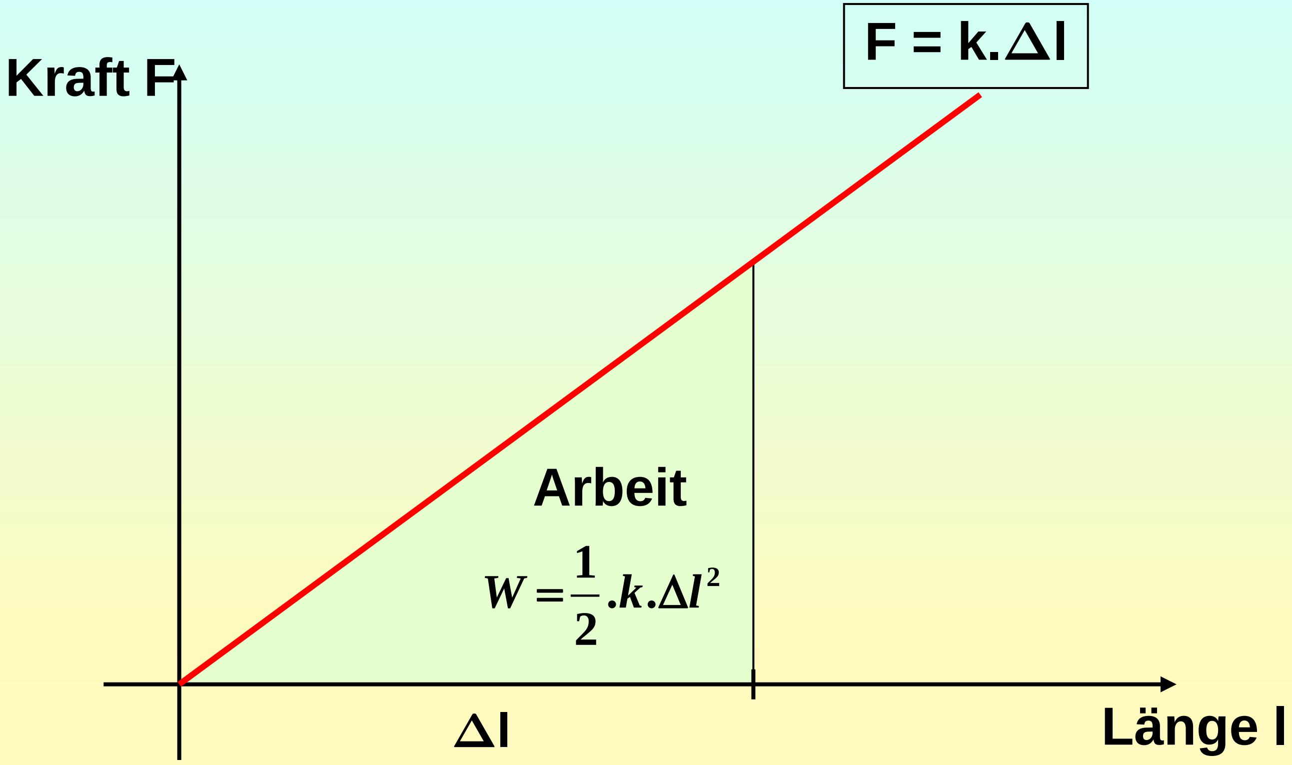
5. Klasse und/oder 6. Klasse Physik



Geschw. v
v=const.
Weg
s = v.t
Zeit t

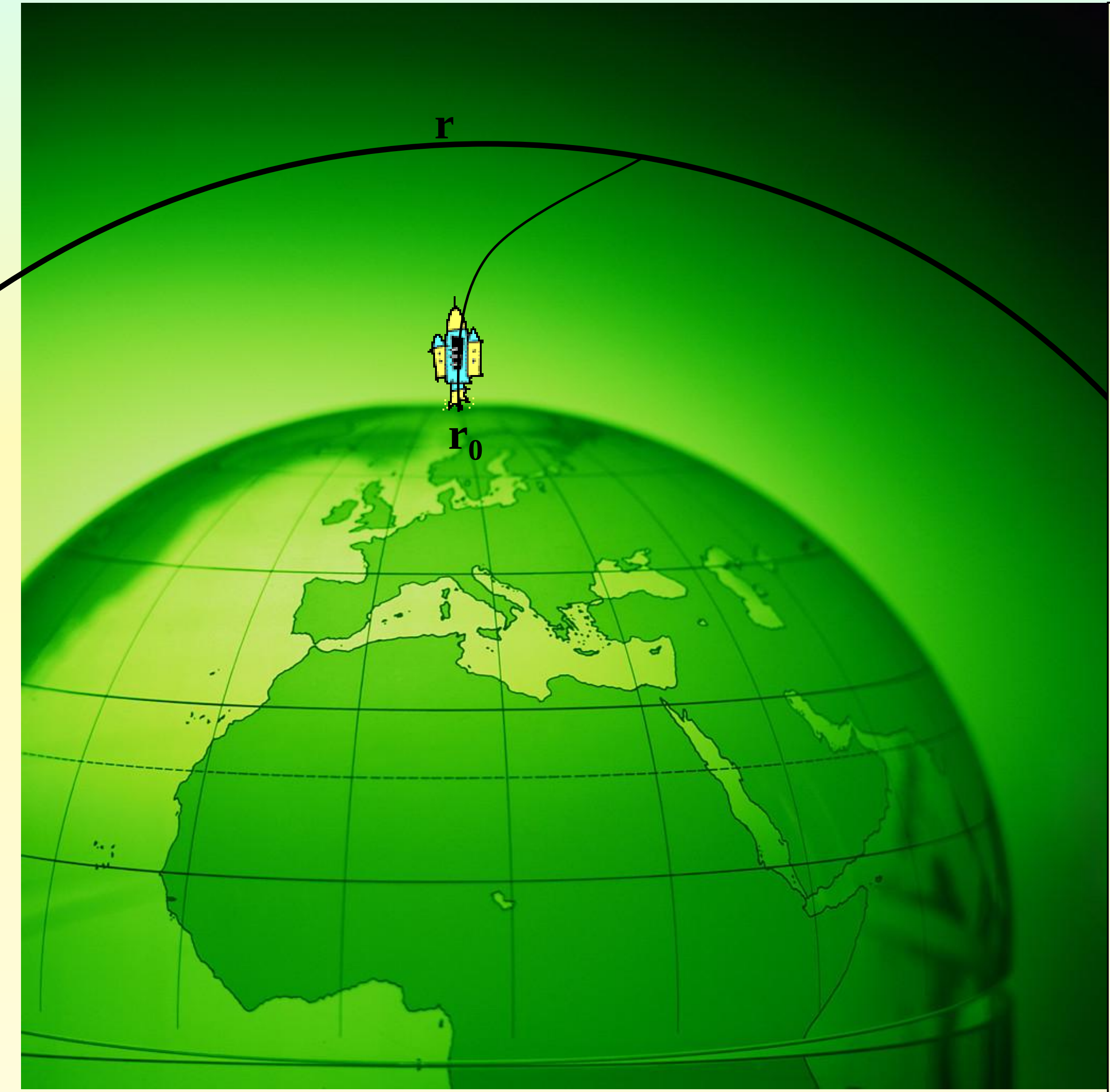


Kraft
F
F=const
.
Arbeit
W = F.s
Weg s



F = k.Δl
Kraft F
Arbeit
$W = \frac{1}{2}.k.\Delta l^2$
Δl
Länge l

6. Klasse Physik Arbeit im Gravitationsfeld



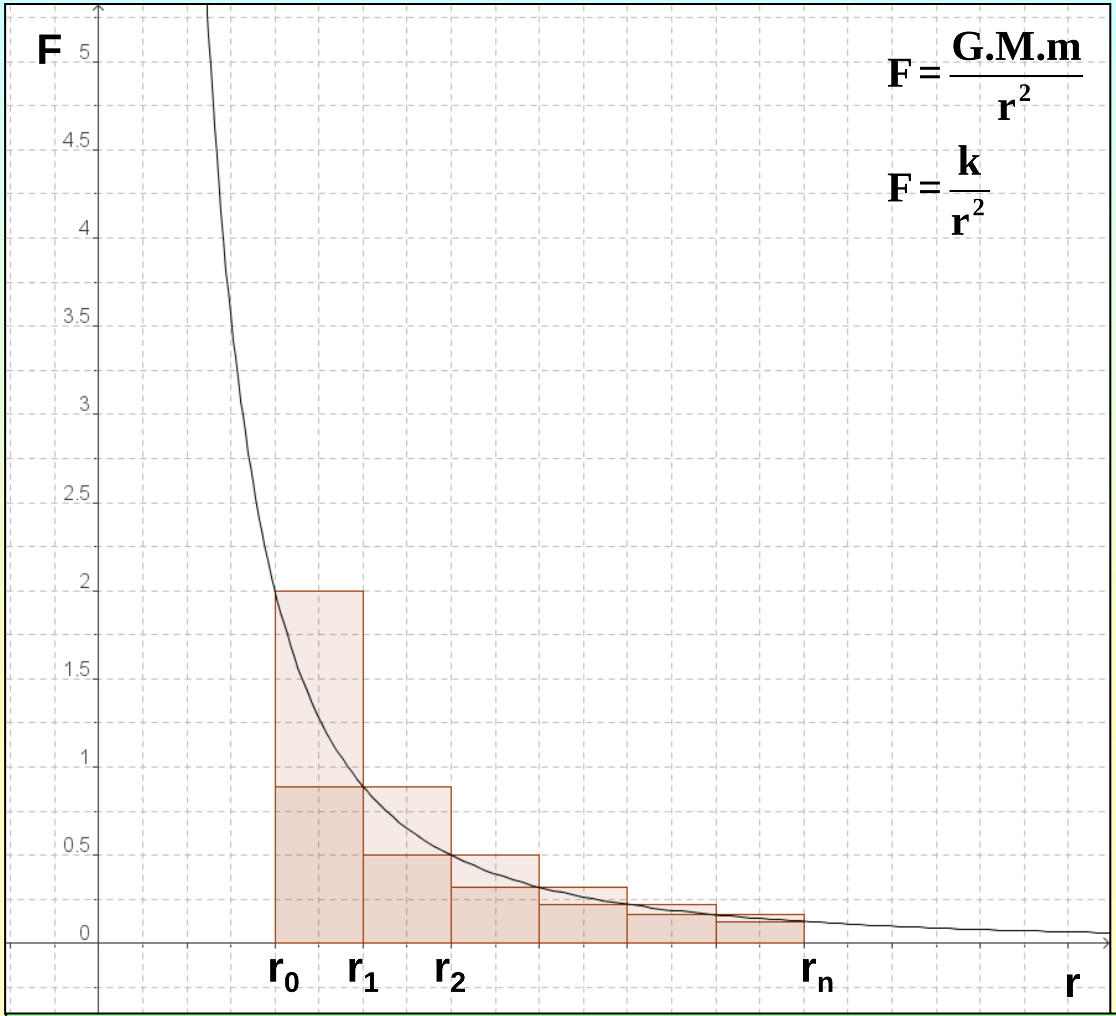
Wie groß ist die Arbeit um eine Rakete der Masse m von der Erdoberfläche r_0 auf eine Umlaufbahn r zu bringen?

Die Masse der Erde sei M

Gravitationsgesetz:

$$F = \frac{G.M.m}{r^2}$$

$$F = \frac{k}{r^2}$$



$$F = \frac{G.M.m}{r^2}$$

$$F = \frac{k}{r^2}$$

Arbeit im Gravitationsfeld

Arbeit = Kraft x Weg

⇔ Flächeninhalt unter der „Kraftkurve“

$$W_{grav} = G.M.m.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

$$W_u = \frac{k}{r_1^2}.(r_1 - r_0) + \frac{k}{r_2^2}.(r_2 - r_1) + \frac{k}{r_3^2}.(r_3 - r_2) + \ldots + \frac{k}{r_n^2}.(r_n - r_{n-1})$$

$$W_o = \frac{k}{r_0^2}.(r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1^2}.(r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2^2}.(r_3 - r_2) + \ldots + \frac{k}{r_{n-1}^2}.(r_n - r_{n-1})$$

$$W_u = \frac{k}{r_1^2}.(r_1 - r_0) + \frac{k}{r_2^2}.(r_2 - r_1) + \frac{k}{r_3^2}.(r_3 - r_2) + \ldots + \frac{k}{r_n^2}.(r_n - r_{n-1})$$

$$W_o = \frac{k}{r_0^2}.(r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1^2}.(r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2^2}.(r_3 - r_2) + \ldots + \frac{k}{r_{n-1}^2}.(r_n - r_{n-1})$$

$$W_{komp} = \frac{k}{r_0.r_1}.(r_1 - r_0) + \frac{k}{r_1.r_2}.(r_2 - r_1) + \frac{k}{r_2.r_3}.(r_3 - r_2) + \ldots + \frac{k}{r_{n-1}.r_n}.(r_n - r_{n-1})$$

$$W_{komp} = k.\left(\frac{1}{r_0} \cancel{- \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_1}} \cancel{- \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2}} \cancel{- \frac{1}{r_3} +} \ldots \cancel{- \frac{1}{r_{n-1}} + \frac{1}{r_{n-1}}} - \frac{1}{r_n}\right)$$

$$W_{komp} = k.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_n}\right) \Rightarrow W_{grav} = G.M.m.\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$$

Schritt 3: Integral und Produktsummen

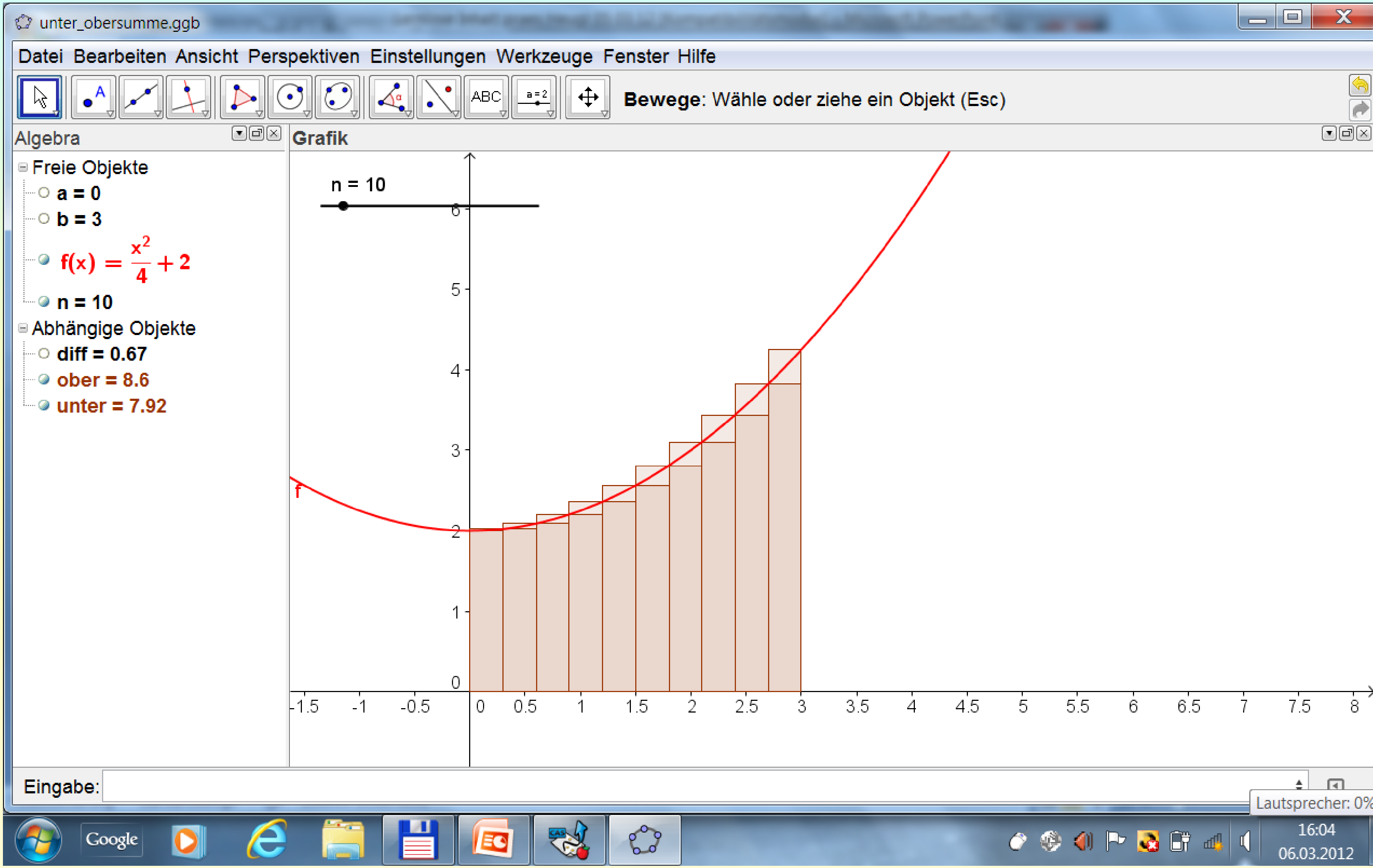
Voraussetzung: Lernlinie Grenzwert

Numerische Integration:

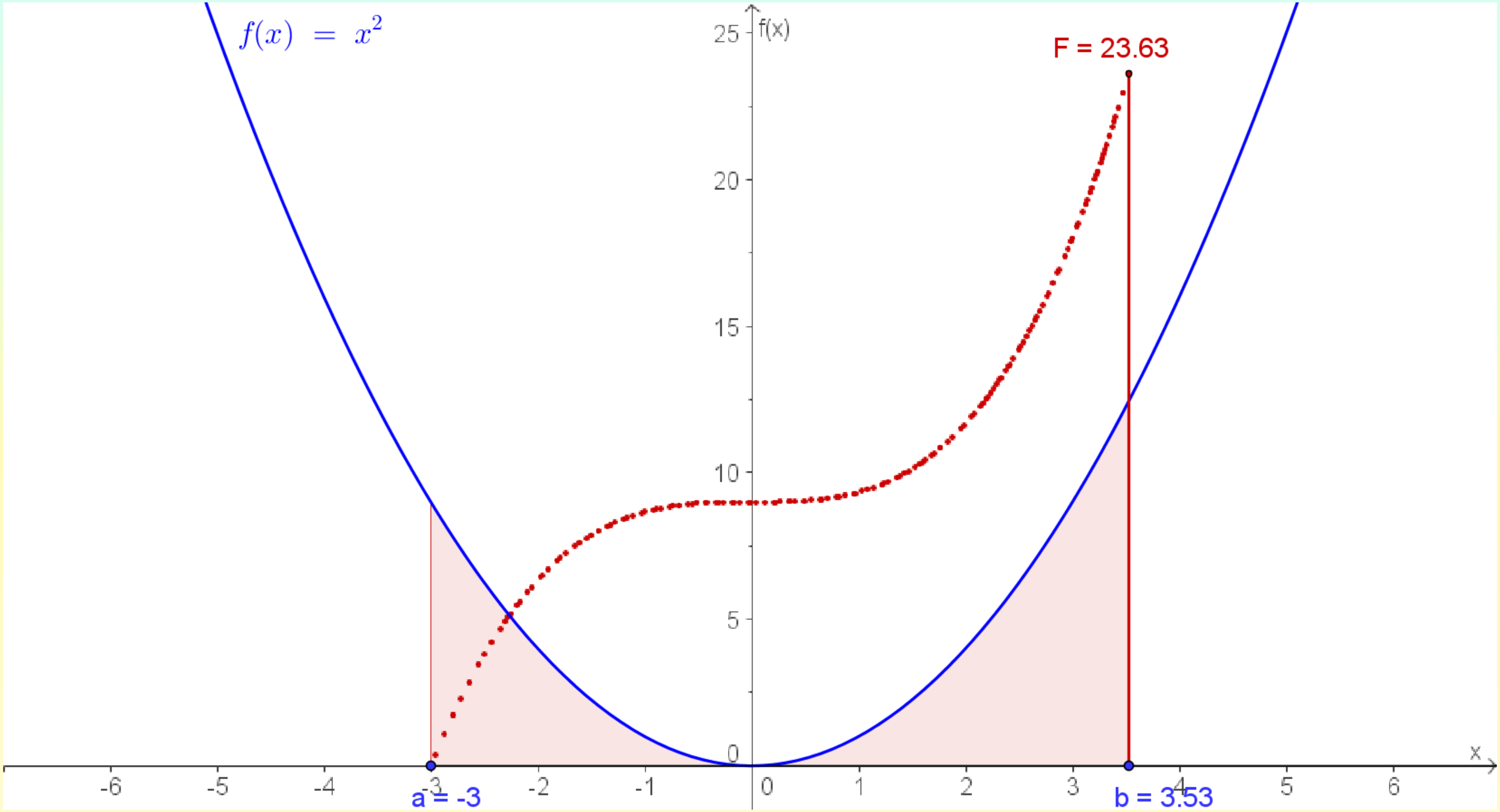
- ❖ **Unter- und Obersumme**
- ❖ **Mittelsumme**
- ❖ **Trapezregel Simpsonregel**

„Anschleichen“ durch Unter- und Obersummen

Flächeninhaltsfunktion –
Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung



unter_obersumme.ggb
Datei Bearbeiten Ansicht Perspektiven Einstellungen Werkzeuge Fenster Hilfe
Bewege: Wähle oder ziehe ein Objekt (Esc)
Algebra
Freie Objekte
a = 0
b = 3
$f(x) = \frac{x^2}{4} + 2$
n = 10
Abhängige Objekte
diff = 0.67
ober = 8.6
unter = 7.92
Grafik
n = 10
f
Eingabe:
Lautsprecher: 0%
16:04
06.03.2012



$f(x) = x^2$
f(x)
F = 23.63
x
a = -3
b = 3.53
25
20
15
10
5
0
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5
6

Grenzwert von Produktsummen

Berechnung mit Hilfe von Technologie

Beispiel:

Berechne das bestimmte Integral

$$\int_a^b x^2\,dx$$

unter Nutzung der Definition des Integrals. Verwende z. B. die Idee der “Mittelsummen”

$$x_i = a + \frac{b-a}{n}\cdot i = -2 + \frac{6}{n}\cdot i$$

$$\xi_i = \frac{1}{2}\left(x_{i-1} + x_i\right) = \frac{1}{2}\left[a + \frac{b-a}{n}\cdot(i-1) + a + \frac{b-a}{n}\cdot i\right] =$$

$$\ldots = \ldots = \frac{-2n+6i-3}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi_i) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n}\cdot\frac{(-2n+6i-3)^2}{n^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{6}{n}\cdot\frac{4n^2+36i^2+9-24ni+12n-36i}{n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{24n^2+216i^2+54-144ni+72n-216i}{n^3}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{24n^3+36n\cdot(n+1)(2n+1)+54n-144n\cdot\frac{n\cdot(n+1)}{2}+72n^2+36\frac{n(n+1)}{2}}{n^3}$$

$$\vdots$$

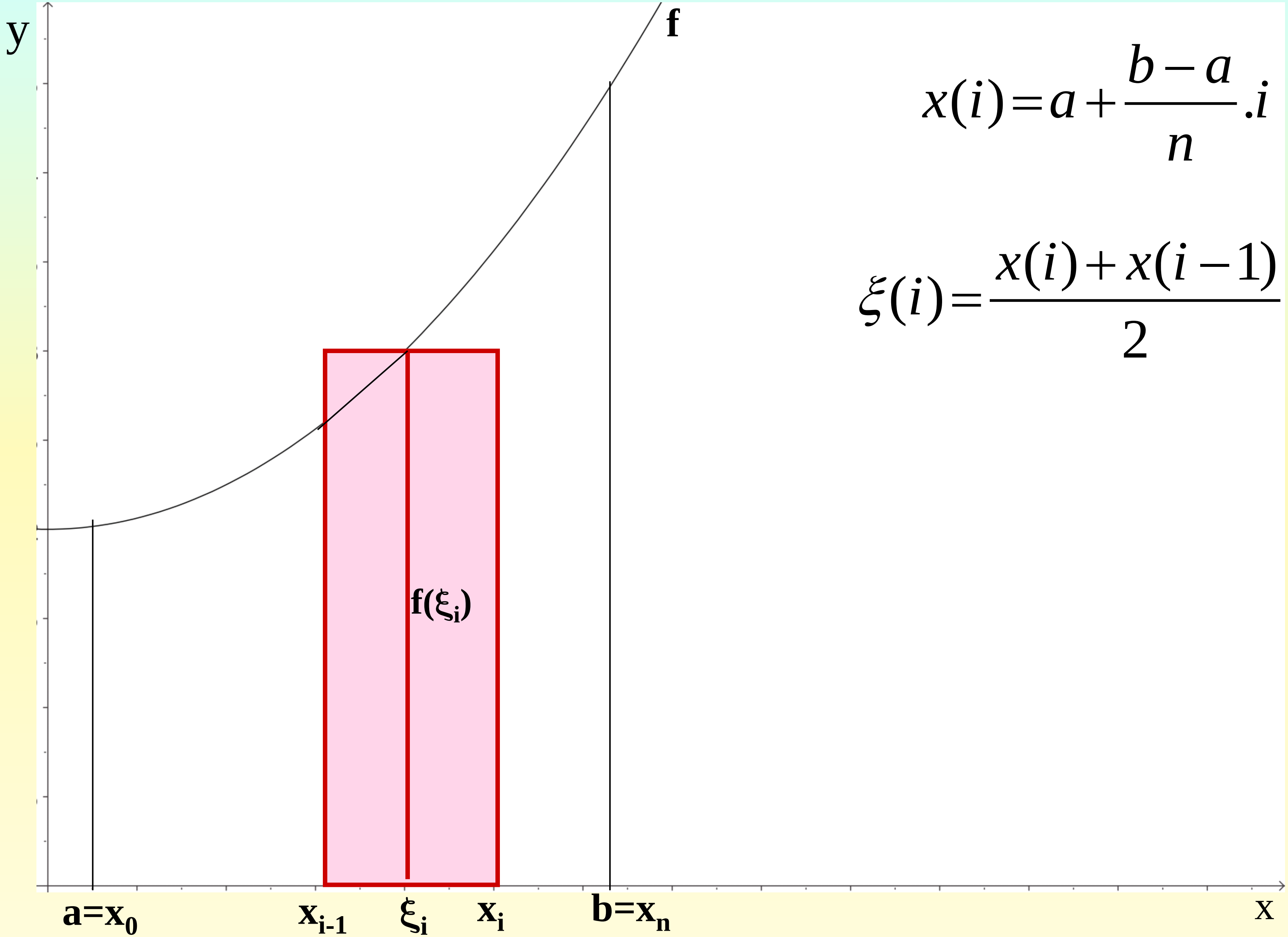
$$= 24 + 72 - 144\cdot\frac{1}{2} = 24\,E^2$$

PROBE $\int_{-2}^{4} x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{-2}^{4} = \frac{72}{3} = 24\,E^2$

VERWENDETE FORMEL

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n\cdot(n+1)}{2} \qquad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$$

Mittelsummen



$$x(i) = a + \frac{b-a}{n} . i$$

$$\xi(i) = \frac{x(i) + x(i-1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi(i))\right) \qquad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2\cdot\left(4\cdot n^2-1\right)+2\cdot a\cdot b\cdot\left(2\cdot n^2+1\right)+b^2\cdot\left(4\cdot n^2-1\right)\right)}{12\cdot n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{b-a}{n}\cdot f(\xi(i))\right)\right) \qquad \frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}$$

$$\operatorname{expand}\left(\frac{-(a-b)\cdot\left(a^2+a\cdot b+b^2\right)}{3}\right) \qquad \frac{b^3}{3}-\frac{a^3}{3}$$

3/99

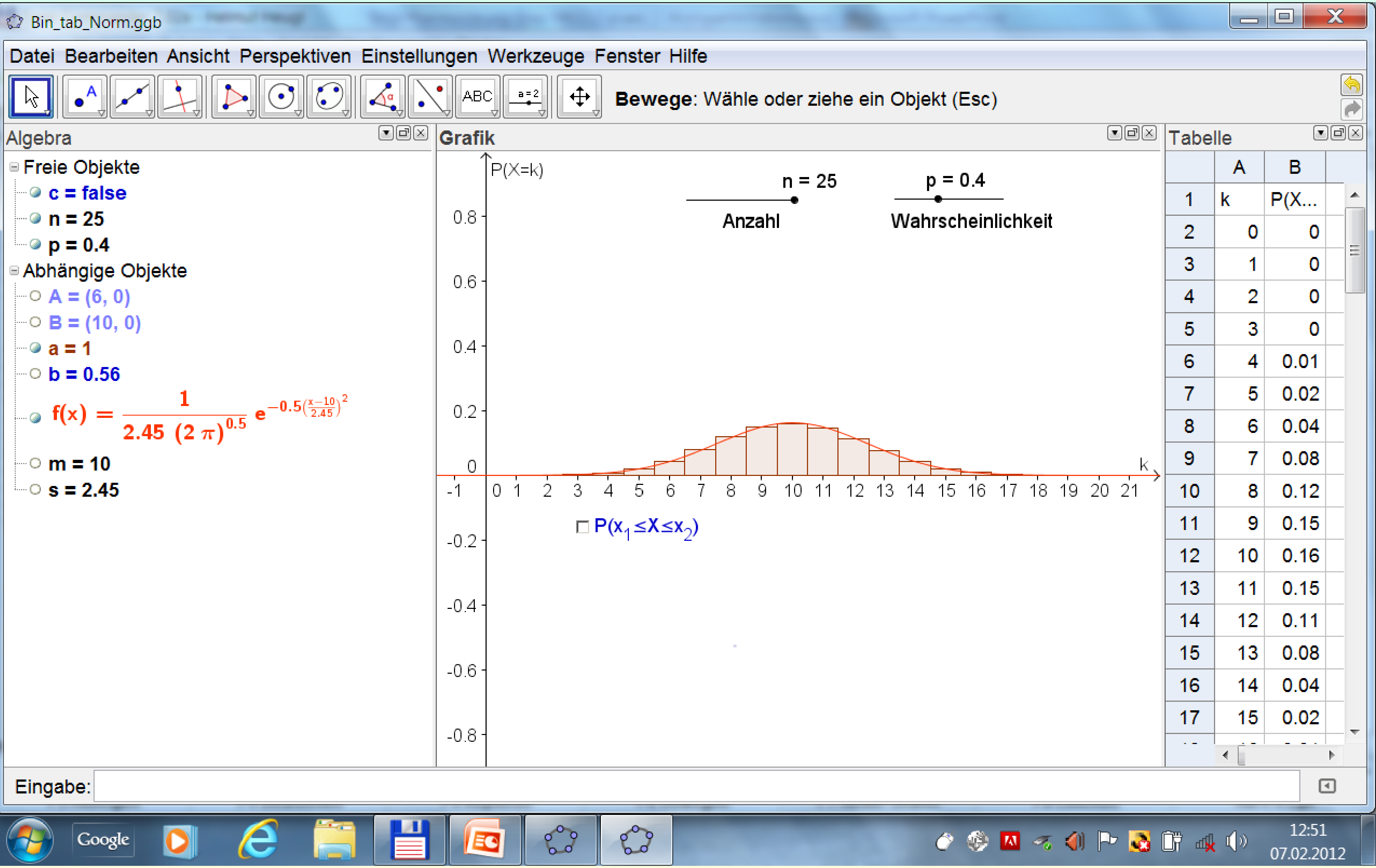
Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

Mit Hilfe von Technologie kann man experimentell erkennen, dass für große n aus der „Treppenkurve“, die den oberen Rand der Rechtecke bei der Binomialverteilung bildet, als Grenzwert eine integrierbare Funktion f entsteht, die als Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion der stetigen Zufallsvariablen X bezeichnet wird. Dem entsprechend nähert sich für große n die Produktsumme der Rechtecksflächeninhalte im Intervall $[x_1,x_2]$

dem Integral $\int_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx$

welches die Wahrscheinlichkeit $P(x_1 \leq X \leq x_2)$ angibt.

Von der Binomialverteilung zur Normalverteilung

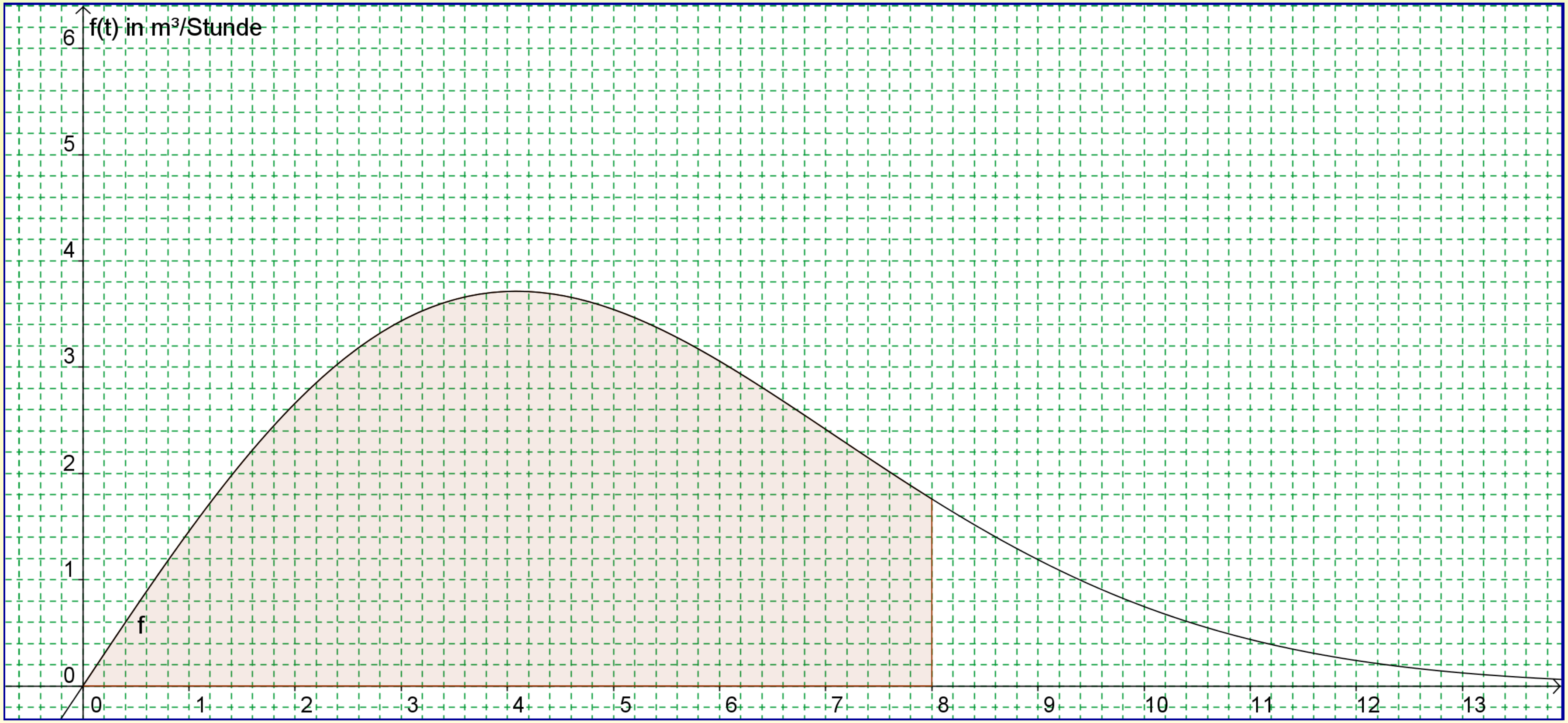


Aufgabe Sauerstoffproduktion

a) Beschreibe verbal die Sauerstoffproduktion einer solchen Pflanze mithilfe des Graphen

b) Schätze den Inhalt der schraffierten Fläche, erkläre deine vorgangsweise und interpretiere den so erhaltenen Wert im Kontext

c) Gib einen Ansatz an, mit dem der Inhalt der schraffierten Fläche bei gegebener Funktion f berechnet werden kann.



Kompetenzpotential in Aufgaben finden

Beispiel 1:

Gegeben ist die Funktion *f*: $$f(x) = \frac{2500.x}{(1+2.x)^2}$$

Ermittle den Inhalt der Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse im Intervall [1,3]

Beispiel 2:

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 l Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit eine Zuflußrate von

$$Q(t) = \frac{2500.t}{(1+2.t)^2} \qquad \text{(l/h)}$$

Die Zuflußrate Q wird in Liter pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Der Flächeninhalt unter der Kurve Q(t) zwischen t=1 und t=3 beträgt:

$$\int_1^3 \frac{2500t}{(1+2t)^2}\, dt \approx 410.5$$

Was bedeutet dieser Wert im Zusammenhang mit dem Problem „Wassertank"?

- **Quelle: Geneviève Savard and Kathleen Pineau École de technologie supérieure, Montréal, Canada**

  Vortrag bei der Konferenz TIME2008 in Süd Afrika

Beispiel 3:

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 l Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit eine Zuflußrate von

$$Q(t) = \frac{2500.t}{(1+2.t)^2} \qquad \text{(l/h)}$$

Die Zuflußrate Q wird in Liter pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Wie groß ist das Wasservolumen im Tank um 15 Uhr? Erläutere deine Überlegungen.

$$500 + \int_0^2 \frac{2500t}{(1+2t)^2}\,dt \approx 1005.9\,\mathrm{L}$$

- Quelle: Geneviève Savard and Kathleen Pineau
  École de technologie supérieure, Montréal, Canada
  Vortrag bei der Konferenz TIME2008 in Süd Afrika

Beispiel 4:

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 l Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit eine Zuflußrate von

$$Q(t) = \frac{2500.t}{(1+2.t)^2} \qquad \text{(l/h)}$$

Die Zuflußrate Q wird in Liter pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Der Tank fasst maximal 1250 Liter. Um wieviel Uhr etwa wird er überfließen? Erläutere Deine Überlegungen.

$$V(x) = 500 + \int_0^x \frac{2500t}{(1+2t)^2}\,dt$$

$$V(x) = 1250 \Leftrightarrow x \approx -0.354 \; or \; x \approx 3.479$$

Beispiel 5:

Um 13 Uhr enthält ein Regenwassertank 500 l Wasser. Regenwasser füllt den Tank mit eine Zuflußrate von

$$Q(t) = \frac{2500.t}{(1+2.t)^2} \qquad \text{(l/h)}$$

Die Zuflußrate Q wird in Liter pro Stunde gemessen, die Zeitmessung beginnt um 13 Uhr.

Wie kann man mit Hilfe der Integralrechnung die durchschnittliche Zuflußrate zwischen 13 Uhr und 15 Uhr ermitteln? Interpretiere den Wert graphisch im Bezug zum Graphen von Q(t).

- **Quelle: Geneviève Savard and Kathleen Pineau École de technologie supérieure, Montréal, Canada**

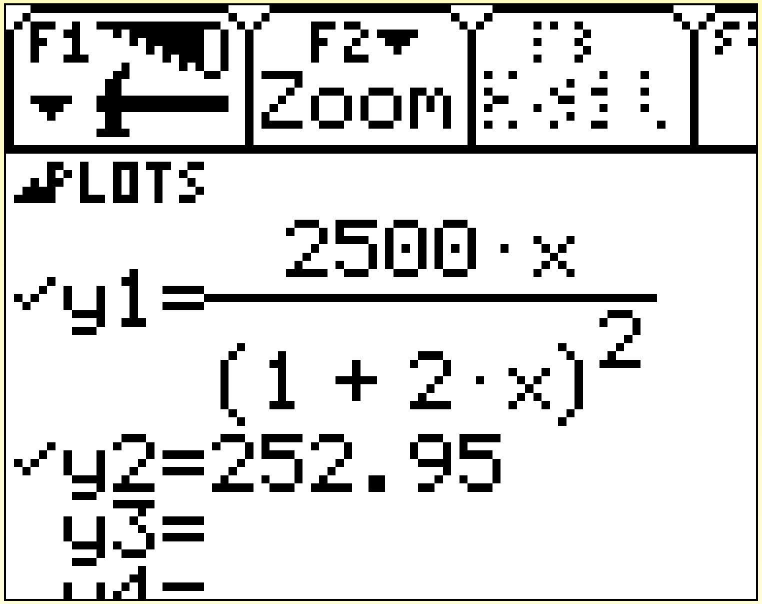
  Vortrag bei der Konferenz TIME2008 in Süd Afrika

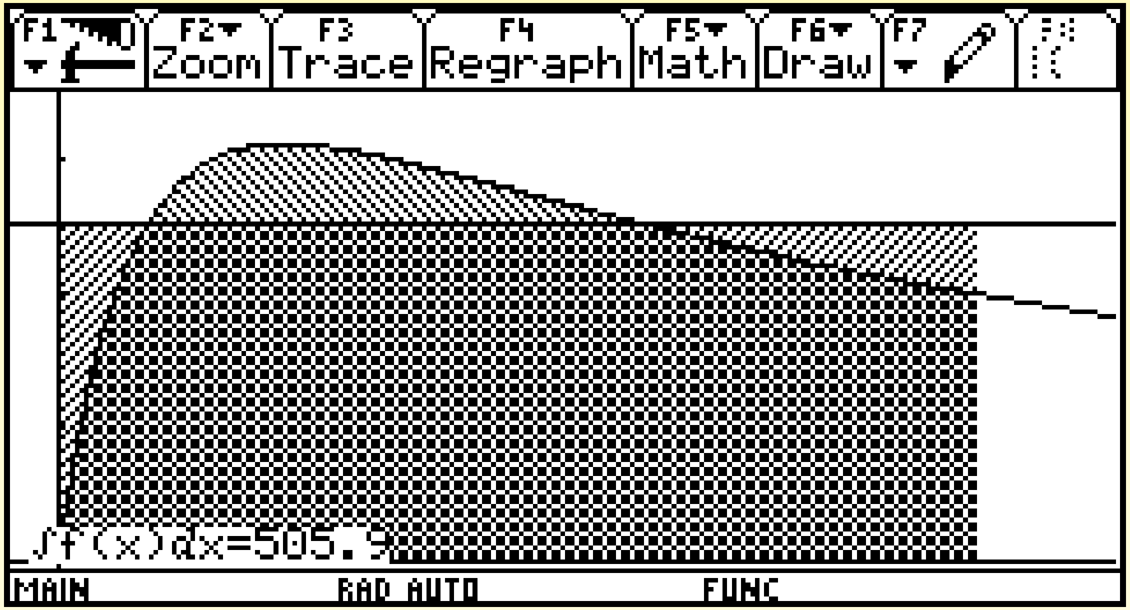
Lösung Beispiel 5

Zufluss zwischen 13 und 15 Uhr

Durchschnittl. Zufluss pro Stunde

$$\frac{\int_0^2 \frac{2500t}{(1+2t)^2}\,dt}{2-0} \approx \frac{505.9}{2} \text{ L/h} = 252.95 \text{ L/h}$$





Langfristiges Lernen als Aufbau einer kognitiven Struktur
⇔ Aufbau eines Netzwerkes